Universidad Nacional Experimental Marítima del Caribe
Vicerrectorado Académico
Dirección Docente
Coordinación de Ciencias Básicas
Cálculo I

Práctica #2: Funciones

DEFINICIÓN DE FUNCIÓN:

Sean A y B dos conjuntos arbitrarios. Diremos que f es una **función** o **aplicación** de A en B si y sólo si f es una relación entre A y B, tal que *todo* elemento de A tiene un *único* correspondiente en B.

DOMINIO, CODOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCIÓN:

Consideremos la función $f : A \to B$. El **dominio** de f es el conjunto de partida A, y lo representaremos por Dom(f) o D_f.

El **codominio** de f, llamado también **conjunto de valores** de f, es el conjunto de llegada B, y lo representaremos por Codom(f) o C_f.

El **rango** de f, llamado también **contradominio** o **recorrido** de f, es el conjunto de todas las imágenes correspondientes a todos los elementos del dominio de f, y lo representaremos por Ran(f) o R_f. Nótese que Ran(f) $\subseteq$ Codom(f).

Ejemplo: Sea la función f : {–4,–2,0,2,4} $\to$ {-16,–4,–1,0,1,4,16}, definida por la ecuación $f(x) = x^2$. En este caso, el dominio, el codominio y el rango de f son: Dom(f) = D_f = {–4,–2,0,2,4}, Codom(f) = C_f = {-16,–4,–1,0,1,4,16} y Ran(f) = R_f = {0,4,16}

En este curso nuestro interés va a estar centrado en el estudio de funciones cuyos dominios y codominios sean subconjuntos de $\mathbb{R}$ (estas funciones son llamadas *funciones reales de una variable real)*, establecemos lo siguiente: cuando una función f : x $\to$ $f(x)$ sea real de variable real y no se indique un dominio específico para la misma, este dominio vendrá dado por el conjunto de valores más amplio admisibles para $x \in \mathbb{R}$, esto es, el conjunto de todos los valores reales de x para los cuales la imagen de x existe y es también número real. En cuanto, al codominio de una función f real de variable real se asumirá siempre que Codom(f) = $\mathbb{R}$, mientras no se indique otra cosa.

Ejemplos:

- El dominio $f(x) = 4x - 2$ es $\mathbb{R}$,
- El dominio de $f(x) = \dfrac{5}{x}$ es $\mathbb{R}^*$ = $\mathbb{R}$ –{0}.
- El dominio $f(x) = Ln(x)$ es $\mathbb{R}^+$ = $(0, \infty)$
- El dominio de $f(x) = \sqrt{x-1}$ es $[1, \infty)$

<u>ÁLGEBRA DE FUNCIONES</u>:

Dadas dos funciones f y g , se definen las siguientes operaciones:

- Adición: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, donde $Dom(f+g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
- Sustracción: $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$,donde $Dom(f-g) = Dom(f) \cap Dom(g)$
- Multiplicación: $(fg)(x) = f(x)g(x)$,donde $Dom(fg) = Dom(f) \cap Dom(g)$
- División: $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, donde $Dom\left(\dfrac{f}{g}\right) = Dom(f) \cap \{x \in Dom(g) / g(x) \neq 0\}$
- Composición $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ donde $Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) / g(x) \in Dom(f)\}$

Ejercicios

1. Determine el dominio de las siguientes funciones

(1.1) $f(x) = 4 + 2x$ (1.2) $f(x) = \sqrt{2+x}$ (1.3) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

(1.4) $f(x) = |x+3|$ (1.5) $f(x) = \sqrt{-x}$ (1.6) $f(x) = \dfrac{2x-1}{3-x}$

(1.7) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{x+5}$ (1.8) $f(x) = 1 - \dfrac{2x+1}{(x-1)\sqrt{x+4}}$ (1.9) $f(x) = \dfrac{3+x}{x^2+1}$

(1.10) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6}$ (1.11) $f(x) = x^2 + 2x + 3$ (1.12) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x} - 5}$

(1.13) $f(x) = 3^x$ (1.14) $f(x) = \sqrt[3]{x-2}$ (1.15) $f(x) = \sqrt{(x-1)x}$

(1.16) $f(x) = \dfrac{2}{x-1} + \sqrt{x}$ (1.17) $f(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)}$ (1.18) $f(x) = x^3 - 6$

(1.19) $f(x) = \sqrt{x} - 6x$ (1.20) $f(x) = 3$ (1.21) $f(x) = \dfrac{-5}{x^2 - x - 12}$

2. En los ejercicios siguientes determine $f+g,\ f-g,\ f.g,\ \dfrac{f}{g},\ f\circ g,\ g\circ f$ y halle el dominio en cada caso

(2.1) $f(x)=2x+1$ y $g(x)=\sqrt{x}-2$ (2.2) $f(x)=1-x$ y $g(x)=3x$

(2.3) $f(x)=-x+4$ y $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ (2.4) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ y $g(x)=\dfrac{2x}{1-x}$

3. En las siguientes funciones determine:

$$(f+g)(2),\ \left(\frac{h}{f}\right)(1),\ (f\circ g\circ f)(3),\ (h.g)(0),\ (g\circ h)(-2),\ (f\circ f+g\circ g)(4)$$

donde:

$$f(x)=x^2-4 \qquad g(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 2 \\ \dfrac{x+1}{2x} & \text{si } 0<x<2 \\ \sqrt{-x} & \text{si } x<0 \end{cases} \qquad h(x)=\begin{cases} 1-\sqrt{-x} & \text{si } x\leq -1 \\ 2+x^2 & \text{si } x>-1 \end{cases}$$

<u>FUNCIONES PARES E IMPARES</u>:

Un conjunto D de números reales es **simétrico respecto del origen** si y sólo si para cada $x\in D$ se tiene que $-x\in D$. Ejemplos: [–4,4], {–2,–1,0,1,2}, $\mathbb{R}$.

Sea f una función con dominio simétrico respecto del origen, diremos que:

a) f es **par** si y sólo si $f(x)=f(-x)$, para todo $x\in Dom(f)$. La gráfica de f es simétrica respecto al eje vertical Y.

b) f es **impar** si y sólo si $f(x)=-f(-x)$), para todo $x\in Dom(f)$. La gráfica de f es simétrica respecto al origen de coordenadas.

Ejercicios

4. Determine cuáles de las siguientes funciones son pares, impares o ninguna:

(4.1) $f(x)=x^2-4$ (4.2) $f(x)=|x|$ (4.3) $f(x)=-x^3$

(4.4) $f(x)=\dfrac{1}{x}+x$ (4.5) $f(x)=\dfrac{1}{x^5-3x^3+x}$ (4.6) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$

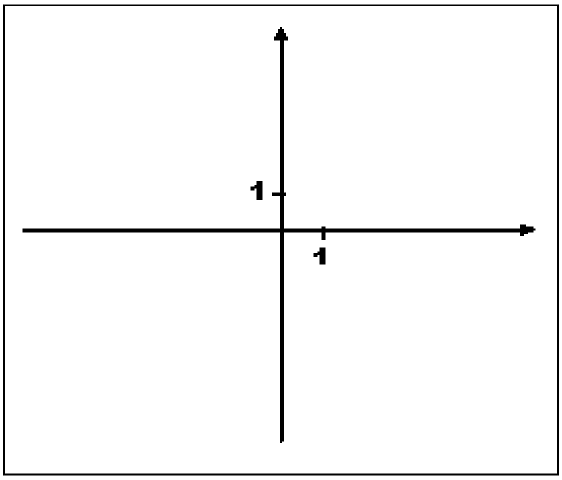
FUNCIONES ALGEBRAICAS Y TRASCENDENTES

¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN ALGEBRAICA?

Una **función algebraica** es aquella formada por un número finito de operaciones algebraicas sobre la *función identidad* y la *función constante.* Estas operaciones algebraicas incluyen adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación. También se aceptarán como funciones algebraicas, a la *función valor absoluto*, a la *función parte entera* y a aquellas formadas por un número finito de operaciones algebraicas sobre éstas y las funciones identidad y constante (se incluye, además, como operación, a la composición). Las principales son:

1. **FUNCIÓN CONSTANTE:** f es una *función constante* si y sólo si $f(x) = c$, donde c es un número real.
2. **FUNCIÓN IDENTIDAD:** f es la *función identidad* si y sólo si $f(x) = x$.
3. **FUNCIÓN AFÍN O LINEAL:** f es una *función afín* o *lineal* si y sólo si $f(x) = ax + b$, donde a y b son números reales.
4. **FUNCIÓN CUADRÁTICA:** f es una *función cuadrática* si y sólo si $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.
5. **FUNCIÓN POLINÓMICA:** f es una *función polinómica* si y sólo si $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$, donde $a_n, a_{n-1}, \cdots a_1, a_0$ son números reales, n es un número natural y $a_n \neq 0$
6. **FUNCIÓN POTENCIAL:** f es una *función potencial* si y sólo si $f(x) = x^n$, donde n es un entero positivo.
7. **FUNCIÓN RAÍZ:** f es una *función raíz* si y sólo si $f(x) = \sqrt[n]{x}$, donde n es un entero mayor que 1.
8. **FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO:** f es la *función valor absoluto* si y sólo si $f(x) = |x|$
9. **FUNCIÓN PARTE ENTERA:** f es la *función parte entera* si y sólo si $f(x) = [x]$, donde [x] denota al entero k tal que $k \leq x < k+1$.
10. **FUNCIÓN CAMBIO DE SIGNO:** f es la *función cambio de signo* si y sólo si $f(x) = -x$.
11. **FUNCIÓN INVERSA NUMÉRICA:** f es la *función inversa numérica* si y sólo si $f(x) = \dfrac{1}{x}$

Análisis de las Representaciones Graficas de las Funciones Algebraicas Básicas

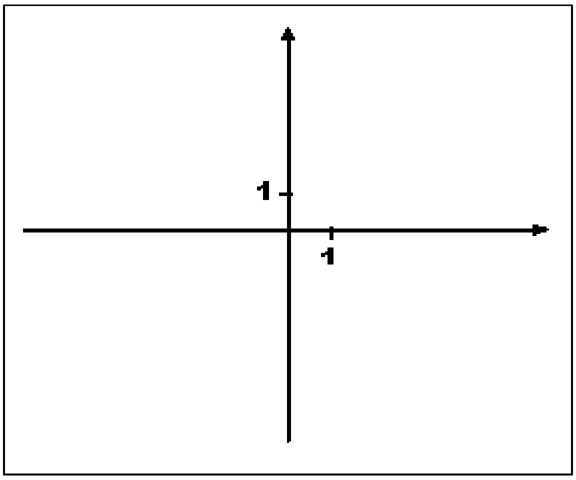


Función constante

$$f(x) = c$$

x	***f(x)***	***x***	***f(x)***

Dominio:
Rango:
Cortes Eje X:
Corte Eje Y:
Máximo absoluto:
Máximos relativos:
Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:
Crece en:
Decrece en:
Partes positivas:
Partes negativas:
Es par?
Es impar?



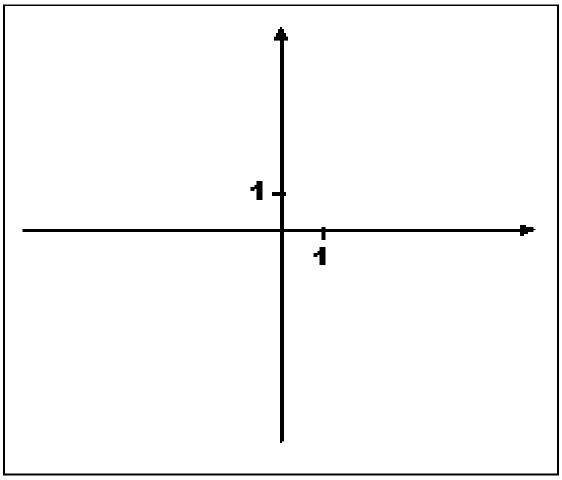
Función Identidad

$$f(x) = x$$

x	***f(x)***	***x***	***f(x)***

Dominio:
Rango:
Cortes Eje X:
Corte Eje Y:
Máximo absoluto:
Máximos relativos:
Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:
Crece en:
Decrece en:
Partes positivas:
Partes negativas:
Es par?
Es impar?

Análisis de las Representaciones Graficas de las Funciones Algebraicas Básicas

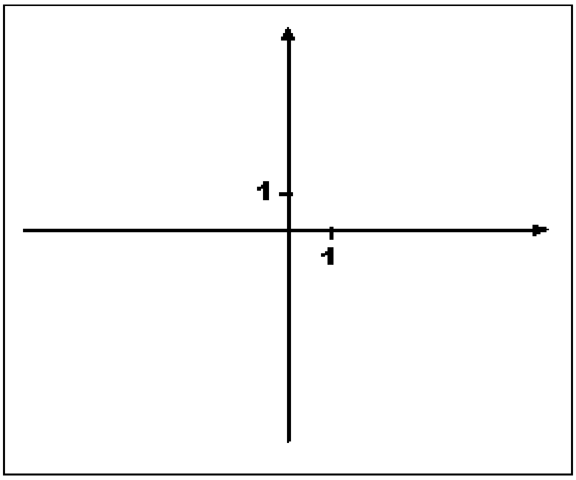


Función cambio de signo

$$f(x) = -x$$

x	f(x)	x	f(x)

Dominio:
Rango:
Cortes Eje X:
Corte Eje Y:
Máximo absoluto:
Máximos relativos:
Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:
Crece en:
Decrece en:
Partes positivas:
Partes negativas:
Es par?
Es impar?



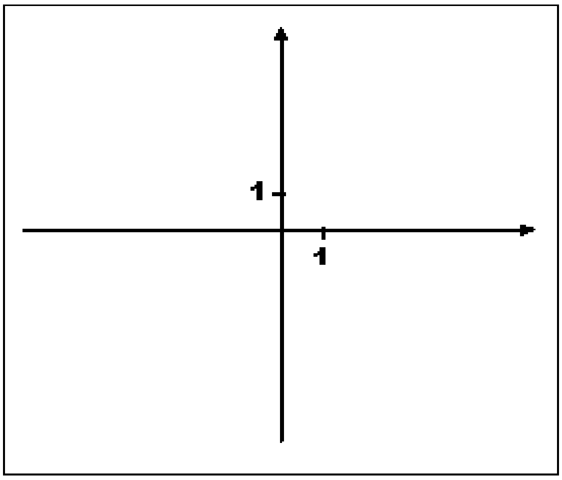
Función raíz cuadrada

$$f(x) = \sqrt{x}$$

x	f(x)	x	f(x)

Dominio:
Rango:
Cortes Eje X:
Corte Eje Y:
Máximo absoluto:
Máximos relativos:
Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:
Crece en:
Decrece en:
Partes positivas:
Partes negativas:
Es par?
Es impar?

Análisis de las Representaciones Graficas de las Funciones Algebraicas Básicas

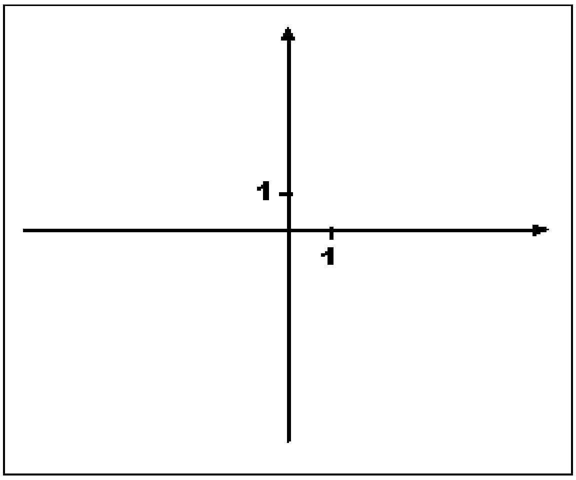


Función cuadrado

$$f(x) = x^2$$

x	***f(x)***	***x***	***f(x)***

Dominio:
Rango:
Cortes Eje X:
Corte Eje Y:
Máximo absoluto:
Máximos relativos:
Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:
Crece en:
Decrece en:
Partes positivas:
Partes negativas:
Es par?
Es impar?



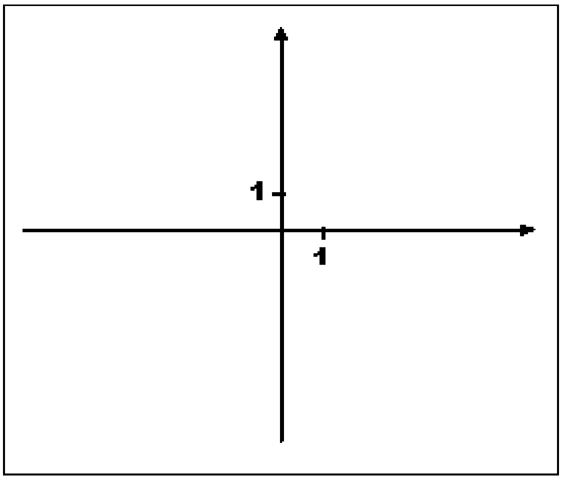
Función cubo

$$f(x) = x^3$$

x	***f(x)***	***x***	***f(x)***

Dominio:
Rango:
Cortes Eje X:
Corte Eje Y:
Máximo absoluto:
Máximos relativos:
Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:
Crece en:
Decrece en:
Partes positivas:
Partes negativas:
Es par?
Es impar?

Análisis de las Representaciones Graficas de las Funciones Algebraicas Básicas



Función valor absoluto

$$f(x) = |x|$$

x	***f(x)***	***x***	***f(x)***

Dominio:

Rango:

Cortes Eje X:

Corte Eje Y:

Máximo absoluto:

Máximos relativos:

Mínimo absolutos:

Mínimos relativos:

Crece en:

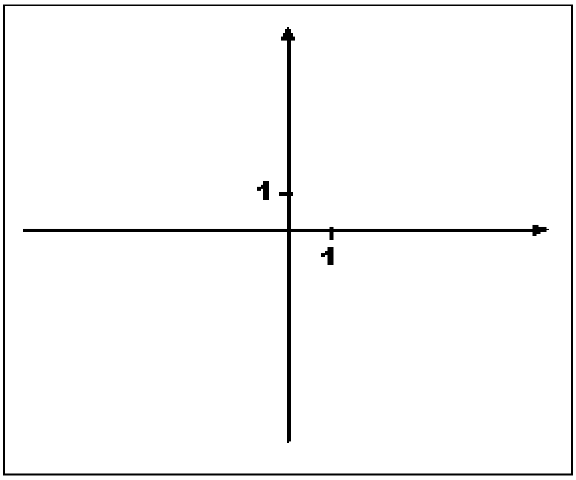
Decrece en:

Partes positivas:

Partes negativas:

Es par?

Es impar?



Función parte entera

$$f(x) = [x]$$

x	***f(x)***	***x***	***f(x)***

Dominio:

Rango:

Cortes Eje X:

Corte Eje Y:

Máximo absoluto:

Máximos relativos:

Mínimo absolutos:

Mínimos relativos:

Crece en:

Decrece en:

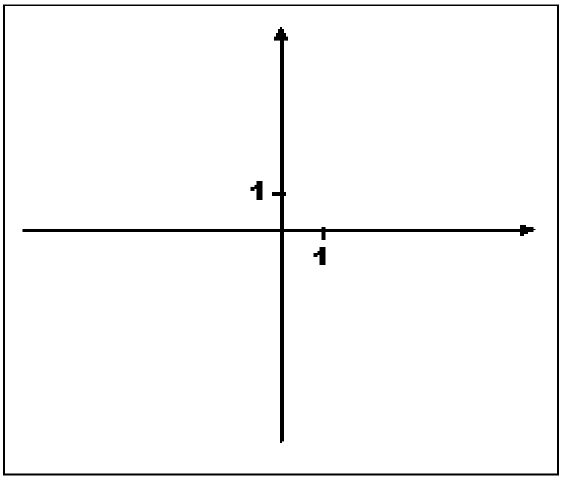
Partes positivas:

Partes negativas:

Es par?

Es impar?

Análisis de las Representaciones Graficas de las Funciones Algebraicas Básicas

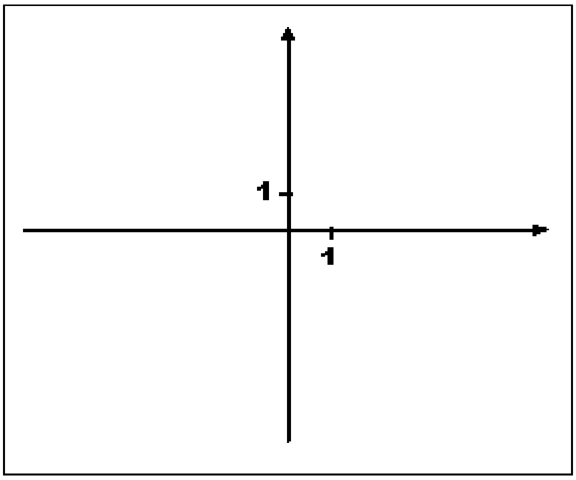


Función inversa numérica

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

x	f(x)	x	f(x)

Dominio:
Rango:
Cortes Eje X:
Corte Eje Y:
Máximo absoluto:
Máximos relativos:
Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:
Crece en:
Decrece en:
Partes positivas:
Partes negativas:
Es par?
Es impar?



Función raíz cúbica

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

x	f(x)	x	f(x)

Dominio:
Rango:
Cortes Eje X:
Corte Eje Y:
Máximo absoluto:
Máximos relativos:
Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:
Crece en:
Decrece en:
Partes positivas:
Partes negativas:
Es par?
Es impar?

¿QUÉ ES UNA FUNCIÓN TRASCENDENTE?

Una **función trascendente** es aquella que no se puede formar con un número finito de operaciones algebraicas sobre la *función identidad* y la *función constante.*

En esta guía, se presentarán y analizarán algunas funciones trascendentes, cuyo uso es muy común en el cálculo elemental.

1. FUNCIONES EXPONENCIALES:

f es una *función exponencial de base* a si y sólo si $f(x) = a^x$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$.

Una de las funciones exponenciales más notables, por sus importantes aplicaciones, es la definida por $f(x) = e^x$, donde e es el número irracional 2,7181828459...

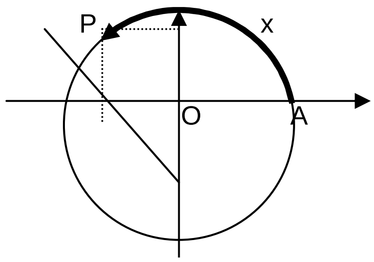
2. FUNCIONES LOGARÍTMICAS:

f es una *función logarítmica de base* a si y sólo si $f(x) = \log_a(x)$, donde $a > 0$ y $a \neq 1$. En este punto, resulta importante recordar que $y = \log_a(x)$ si y sólo si $a^y = x$.

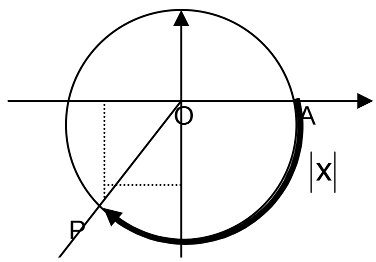
En las funciones logarítmicas, las bases más usadas son la *decimal* (cuando $a = 10$, y se denota por $\log(x)$, en lugar de $\log_{10}(x)$) y la *neperiana* o *natural* (cuando $a = e$, y se denota por $\ln(x)$, en lugar de $\log_e(x)$)

3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS O CIRCULARES:

Consideremos un sistema de coordenadas en el plano y una circunferencia de radio 1, con centro en el origen.



(Figura 1: Caso x > 0)



(Figura 2: Caso x < 0)

Sea x un número real cualquiera. Si x es positivo (Figura 1), a partir de A se recorre sobre la circunferencia una distancia x en sentido "positivo" (del semieje positivo de las abscisas hacia el semieje positivo de las ordenadas); si x es negativo (Figura 2), se recorre una distancia $|x|$ pero en sentido "negativo" (del semieje positivo de las abscisas hacia el semieje negativo de las ordenadas). En ambos casos se obtiene un punto P sobre la circunferencia; si x = 0, se toma P = A. Las coordenadas del punto P así obtenido se llaman el *coseno* y el *seno* del número x y se denotan por:

$\cos(x)$ = abscisa de P

$sen(x)$ = ordenada de P;

también se acostumbra escribirlos sin paréntesis: $\cos x$ y $senx$.

Tenemos así para cada número real x, un número $\cos(x)$ y otro $sen(x)$; es decir, tenemos dos funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$:

$$x \to sen(x)$$

$$x \to \cos(x)$$

que se llaman, por supuesto, *coseno* y *seno* y se denotan por cos y sen, respectivamente.

También, se considerará el estudio de las funciones trigonométricas: *tangente, secante, cosecante y cotangente*, que se denotan por tg, sec, csc y ctg, respectivamente, y se definen:

$$x \to tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)}, \text{ si } \cos(x) \neq 0$$

$$x \to \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \text{ si } \cos(x) \neq 0$$

$$x \to c\,\mathrm{sc}(x) = \frac{1}{sen(x)}, \text{ si } sen(x) \neq 0$$

$$x \to ctg(x) = \frac{\cos(x)}{sen(x)}, \text{ si } sen(x) \neq 0$$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS:

- La *función* ***arcocoseno***, denotada por arccos o $\cos^{-1}$, se define como sigue:

$$y = \arccos(x) \text{ si y sólo si } x = \cos(y), \text{ donde } y \in [0, \pi].$$

- La *función* ***arcoseno***, denotada por arcsen o sen^{-1}, se define como sigue:

$$y = \mathrm{arcs}en(x) \text{ si y sólo si } x = sen(y) \text{ donde } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

- La *función* ***arcotangente***, denotada por arctg o tg^{-1}, se define como sigue:

$$y = \mathrm{arc}\,tg(x) \text{ si y sólo si } x = tg(y), \text{ donde } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

- La *función* ***arcosecante***, denotada por arcsec o $\sec^{-1}$, se define como sigue:

$$y = \mathrm{arc}\sec(x) \text{ si y sólo si } x = \sec(y), \text{ donde } y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

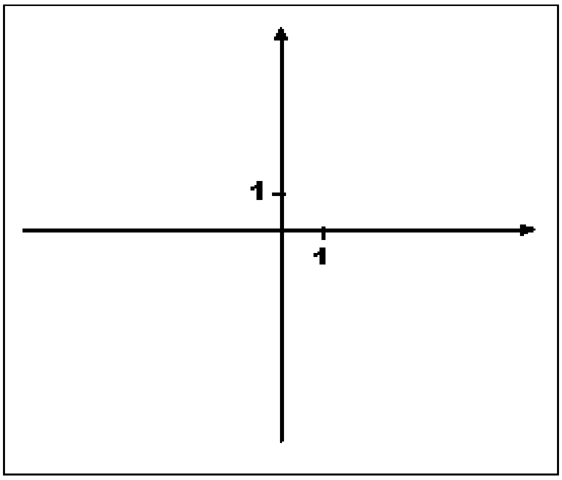
- La *función* ***arcocosecante***, denotada por arccsc o $\csc^{-1}$, se define como sigue:

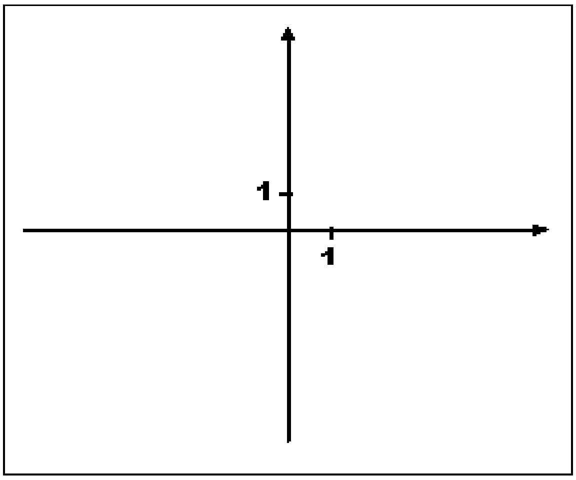
$$y = \mathrm{arccs}c(x) \text{ si y sólo si } x = \csc(y), \text{ donde } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

- La *función* ***arcocotangente***, denotada por arcctg o ctg^{-1}, se define como sigue:

$$y = \mathrm{arcc}\,tg(x) \text{ si y sólo si } x = c\,tg(y) \text{ donde } y \in (0, \pi)$$

Análisis de las Representaciones Graficas de las Funciones Trascendentes Básicas



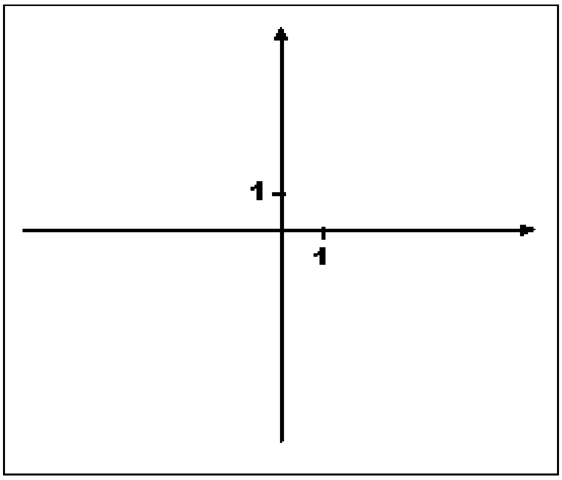


Función exponencial	***Función logaritmo neperiano***
$f(x)=e^{x}$	$f(x)=\ln(x)$

x	***f(x)***	***x***	***f(x)***	***x***	***f(x)***	***x***	***f(x)***

Dominio:	Dominio:
Rango:	Rango:
Cortes Eje X:	Cortes Eje X:
Corte Eje Y:	Corte Eje Y:
Máximo absoluto:	Máximo absoluto:
Máximos relativos:	Máximos relativos:
Mínimo absolutos:	Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:	Mínimos relativos:
Crece en:	Crece en:
Decrece en:	Decrece en:
Partes positivas:	Partes positivas:
Partes negativas:	Partes negativas:
Es par?	Es par?
Es impar?	Es impar?

Análisis de las Representaciones Graficas de las Funciones Trascendentes Básicas



Función logaritmo base 10

$$f(x) = \log(x)$$

x	f(x)	x	f(x)

Dominio:

Rango:

Cortes Eje X:

Corte Eje Y:

Máximo absoluto:

Máximos relativos:

Mínimo absolutos:

Mínimos relativos:

Crece en:

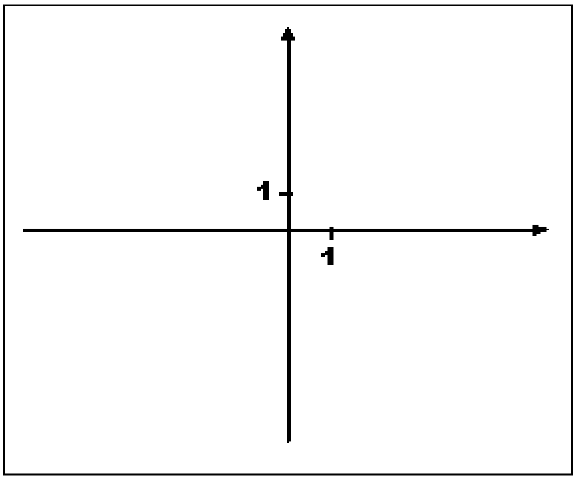
Decrece en:

Partes positivas:

Partes negativas:

Es par?

Es impar?



Función exponencial base 10

$$f(x) = 10^x$$

x	f(x)	x	f(x)

Dominio:

Rango:

Cortes Eje X:

Corte Eje Y:

Máximo absoluto:

Máximos relativos:

Mínimo absolutos:

Mínimos relativos:

Crece en:

Decrece en:

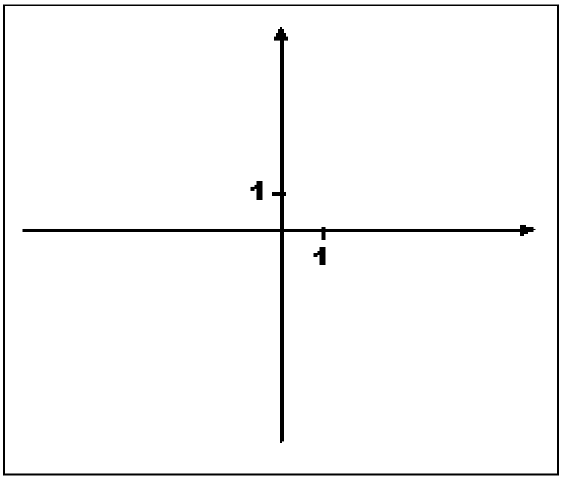
Partes positivas:

Partes negativas:

Es par?

Es impar?

Análisis de las Representaciones Graficas de las Funciones Trascendentes Básicas

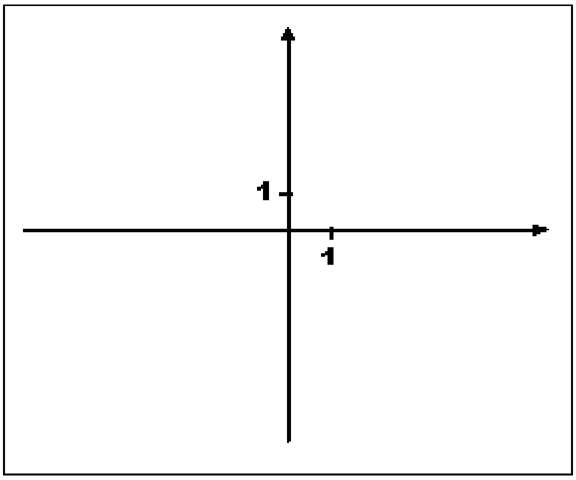


Función seno

$$f(x) = sen(x)$$

x	***f(x)***	***x***	***f(x)***

Dominio:
Rango:
Cortes Eje X:
Corte Eje Y:
Máximo absoluto:
Máximos relativos:
Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:
Crece en:
Decrece en:
Partes positivas:
Partes negativas:
Es par?
Es impar?



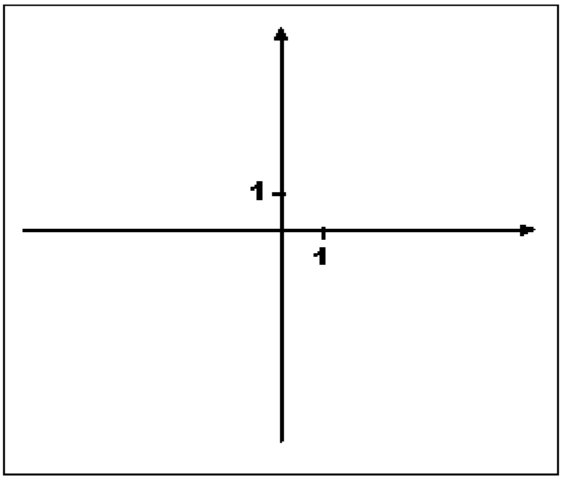
Función coseno

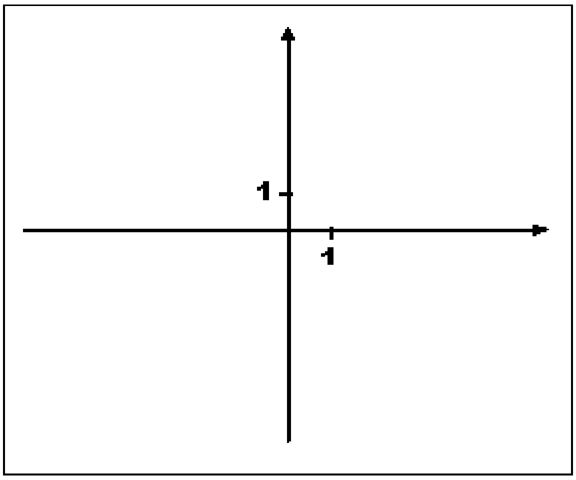
$$f(x) = \cos(x)$$

x	***f(x)***	***x***	***f(x)***

Dominio:
Rango:
Cortes Eje X:
Corte Eje Y:
Máximo absoluto:
Máximos relativos:
Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:
Crece en:
Decrece en:
Partes positivas:
Partes negativas:
Es par?
Es impar?

Análisis de las Representaciones Graficas de las Funciones Trascendentes Básicas



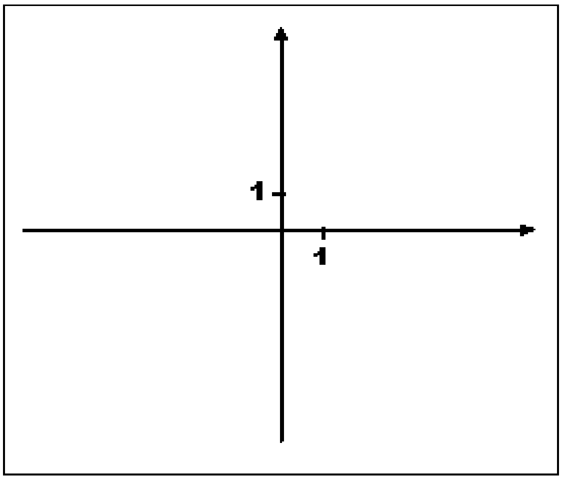


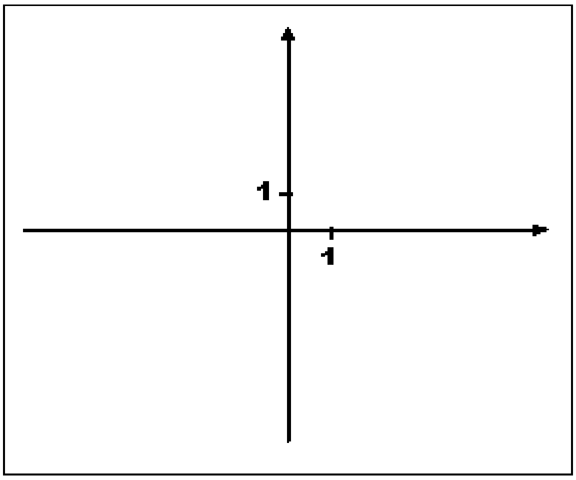
Función tangente	***Función Secante***
$f(x) = tg(x)$	$f(x) = \sec(x)$

x	***f(x)***	***x***	***f(x)***	***x***	***f(x)***	***x***	***f(x)***

Dominio:	Dominio:
Rango:	Rango:
Cortes Eje X:	Cortes Eje X:
Corte Eje Y:	Corte Eje Y:
Máximo absoluto:	Máximo absoluto:
Máximos relativos:	Máximos relativos:
Mínimo absolutos:	Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:	Mínimos relativos:
Crece en:	Crece en:
Decrece en:	Decrece en:
Partes positivas:	Partes positivas:
Partes negativas:	Partes negativas:
Es par?	Es par?
Es impar?	Es impar?

Análisis de las Representaciones Graficas de las Funciones Trascendentes Básicas



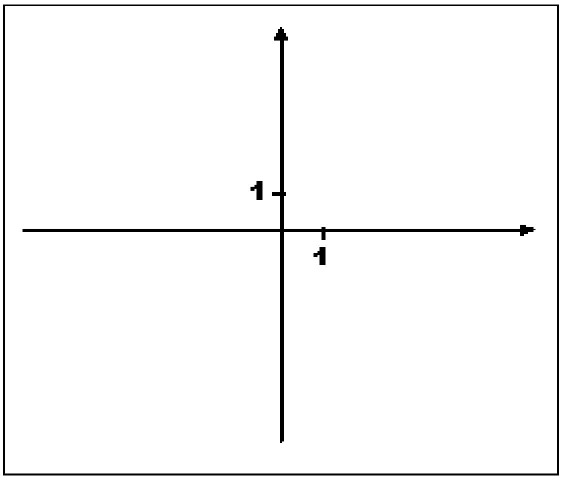


Función cosecante	***Función cotangente***
$f(x) = \cos ec(x)$	$f(x) = \cot g(x)$

x	***f(x)***	***x***	***f(x)***	***x***	***f(x)***	***x***	***f(x)***

Dominio:	Dominio:
Rango:	Rango:
Cortes Eje X:	Cortes Eje X:
Corte Eje Y:	Corte Eje Y:
Máximo absoluto:	Máximo absoluto:
Máximos relativos:	Máximos relativos:
Mínimo absolutos:	Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:	Mínimos relativos:
Crece en:	Crece en:
Decrece en:	Decrece en:
Partes positivas:	Partes positivas:
Partes negativas:	Partes negativas:
Es par?	Es par?
Es impar?	Es impar?

Análisis de las Representaciones Graficas de las Funciones Trascendentes Básicas

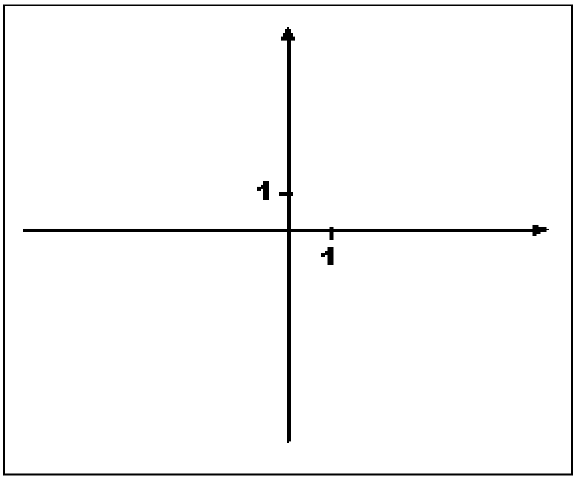


Función arcoseno

$$f(x) = arcsen(x)$$

x	f(x)	x	f(x)

Dominio:
Rango:
Cortes Eje X:
Corte Eje Y:
Máximo absoluto:
Máximos relativos:
Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:
Crece en:
Decrece en:
Partes positivas:
Partes negativas:
Es par?
Es impar?



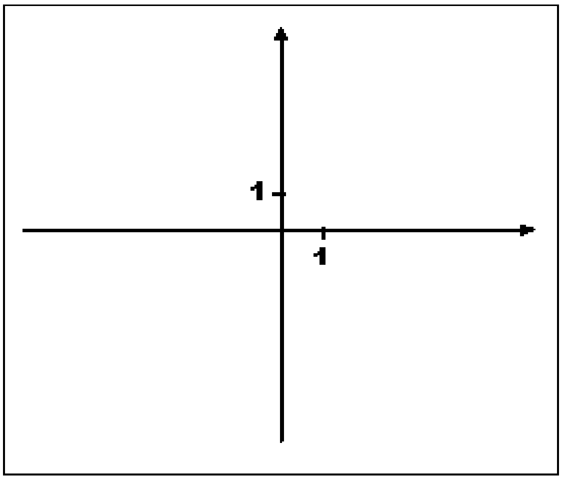
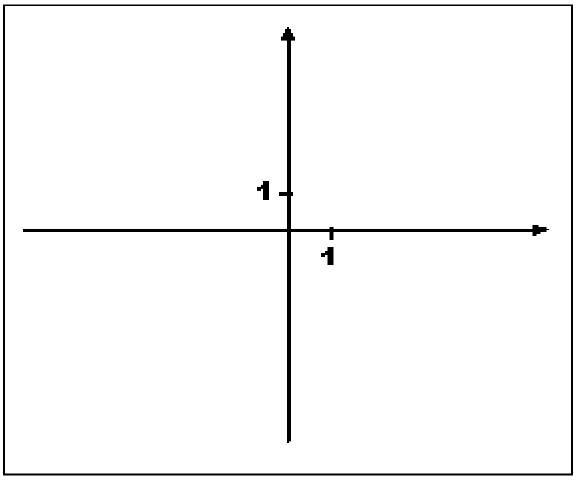
Función arcocoseno

$$f(x) = \arccos(x)$$

x	f(x)	x	f(x)

Dominio:
Rango:
Cortes Eje X:
Corte Eje Y:
Máximo absoluto:
Máximos relativos:
Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:
Crece en:
Decrece en:
Partes positivas:
Partes negativas:
Es par?
Es impar?

Análisis de las Representaciones Graficas de las Funciones Trascendentes Básicas

	
Función arcotangente	***Función arcocosecante***
$f(x) = arctg(x)$	$f(x) = arc\csc(x)$

x	**f(x)**	**x**	**f(x)**	**x**	**f(x)**	**x**	**f(x)**

Dominio:	Dominio:
Rango:	Rango:
Cortes Eje X:	Cortes Eje X:
Corte Eje Y:	Corte Eje Y:
Máximo absoluto:	Máximo absoluto:
Máximos relativos:	Máximos relativos:
Mínimo absolutos:	Mínimo absolutos:
Mínimos relativos:	Mínimos relativos:
Crece en:	Crece en:
Decrece en:	Decrece en:
Partes positivas:	Partes positivas:
Partes negativas:	Partes negativas:
Es par?	Es par?
Es impar?	Es impar?

FUNCIONES INYECTIVAS, SOBREYECTIVAS Y BIYECTIVAS:

Diremos que una función f es **inyectiva** si y sólo si cada elemento y∈Ran(f) es imagen de un único elemento $x \in Dom(f)$. Esto es:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \qquad \forall x_1, x_2 \in Dom(f),$$

o equivalentemente $\quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \qquad \forall x_1, x_2 \in Dom(f)$

Geométricamente, si una función f es inyectiva, una recta horizontal corta al gráfico *a lo sumo* en un punto.

Diremos que una función f es **sobreyectiva** si y sólo si todo elemento $y \in Codom(f)$ es imagen de, por lo menos, un elemento $x \in Dom(f)$. Esto es:

$$Codom(f) = Ran(f)$$

Geométricamente, si una función f es sobreyectiva y $Codom(f) = \mathbb{R}$, una recta horizontal corta al gráfico *por lo menos* en un punto.

Diremos que una función f es **biyectiva** si y sólo si cada elemento $y \in Codom(f)$ es imagen de un único elemento $x \in Dom(f)$. Esto es, f es inyectiva y sobreyectiva, a la vez.

FUNCIÓN INVERSA:

Supongamos que una función f es inyectiva, luego podemos definir una función $g : Ran(f) \to x \in Dom(f)$, tal que:

- Si $(a,b) \in f$ entonces $(b,a) \in g$. Esto significa, geométricamente, que las representaciones gráficas de f y g son simétricas respecto a la recta $y = x$.
- $f(g(b)) = b$ para cada elemento $b \in Dom(g)$.
- $g(f(a)) = a$ para cada elemento $a \in Dom(f)$

Diremos que g es la **función inversa** de f y la denotaremos por f^{-1}.

Ejercicios

4. Determine la inversa (si es que es invertible) a cada una de las funciones básicas algebraicas y trascendentes.

6. Entre las siguientes funciones, decir cuáles son inyectivas y cuáles no.
   a) A cada persona que vive en la tierra asignarle el número de sus años.
   b) A cada país del mundo hacerle corresponder el número de sus habitantes.
   c) A todo libro escrito por un solo autor, asignarle el autor.
   d) A toda persona con cédula de identidad asignarle su número.

7. Sean $A=[-1,1]$, $B=[1,3]$ y $C=[-3,1]$. Sean las funciones $f_1 : A \to \mathbb{R}$, $f_2 : B \to \mathbb{R}$ y $f_3 : B \to \mathbb{R}$ definidas así: A cada número le corresponde su cuadrado. ¿Cuáles son inyectivas?

8. Para cada una de las funciones inyectivas que se definen a continuación, obtenga una expresión para la función inversa f^{-1}

(8.1) $f(x)=3x+2$ (8.2) $f(x)=-x+1$ (8.3) $f(x)=3-5x$

(8.4) $f(x)=(2-x)^3$ (8.5) $f(x)=2-x^3$ (8.6) $f(x)=\sqrt{3x-2}$

(8.7) $f(x)=\dfrac{2}{x-1}$ (8.8) $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ (8.9) $f(x)=\dfrac{2-x}{\sqrt{x}}$

(8.10) $f(x)=\ln(2x)$ (8.11) $f(x)=e^{3x}$ (8.12) $f(x)=2\sqrt{x-2}$

(8.13) $f(x)=-x+2$ (8.14) $f(x)=\sqrt{-x}+2$ (8.15) $f(x)=\sqrt[3]{x-2}$

<u>TRASLACIONES Y REFLEXIONES</u>:

A partir de una función elemental se pueden obtener otras "un poco más complejas" con sólo tener en cuenta las implicaciones geométricas de algunas composiciones notables. Si conocemos el gráfico de $y = f(x)$ entonces respecto de éste:

$y = f(ax)$	es una dilatación si $0<a<1$ y una contracción si $a>1$, respecto del eje X.
$y = f(x+a)$	es una traslación de $\lvert a \rvert$ unidades hacia la izquierda si $a>0$ ó hacia la derecha si $a<0$.
$y = f(-x)$	es una reflexión respecto al eje Y.
$y = -f(x)$	es una reflexión respecto al eje X.
$y = f(x)+a$	es una traslación de $\lvert a \rvert$ unidades hacia arriba si $a>0$ ó hacia abajo si $a<0$.
$y = af(x)$	es una contracción si $0<a<1$ y una dilatación si $a>1$, respecto del eje Y.
$y = \lvert f(x) \rvert$	es una reflexión de la "parte negativa" del gráfico respecto al eje X, sin alterar la "parte positiva" del gráfico.

9. Obtenga el gráfico de las siguientes funciones aplicando reflexiones y traslaciones de las funciones básicas. Determine a partir del gráfico el dominio, rango, los puntos de cortes con los ejes, máximos y mínimos.

(9.1) $f(x)=\lvert x\rvert+1$	(9.2) $f(x)=-(x-2)^3$	(9.3) $f(x)=\sqrt{2x}$
(9.4) $f(x)=\lvert sen(x)\rvert$	(9.5) $f(x)=\ln(x+1)$	(9.6) $f(x)=x^2-4$
(9.7) $f(x)=-\ln(x)$	(9.8) $f(x)=\lvert x-2\rvert$	(9.9) $f(x)=[x]-1$
(9.10) $f(x)=\sqrt{x-1}+2$	(9.11) $f(x)=-2e^x$	(9.12) $f(x)=-2x+2$
(9.13) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$	(9.14) $f(x)=\dfrac{1}{x}-1$	(9.15) $f(x)=\left\lvert\dfrac{1}{x}\right\rvert$
(9.16) $f(x)=\cos(x)+1$	(9.17) $f(x)=sen(x+2\pi)$	(9.18) $f(x)=\cos(x-\pi)$
(9.19) $f(x)=arctg(\lvert x\rvert)$	(9.20) $f(x)=\lvert tg(x)\rvert$	(9.21) $f(x)=2[x]$
(9.22) $f(x)=e^{x-1}+2$	(9.23) $f(x)=\sqrt{\lvert x\rvert}$	(9.24) $f(x)=\lvert(x-2)(x+2)\rvert$
(9.25) $f(x)=(x-1)^3+4$	(9.26) $f(x)=[x+1]$	(9.27) $f(x)=\lvert\sec(x)\rvert-2$
(9.28) $f(x)=\lvert x^2-3x+2\rvert$	(9.29) $f(x)=-sen(-x)$	(9.30) $f(x)=-\left\lvert\sqrt{x-2}+1\right\rvert$